第３講　微分法，積分法①

1　曲線 $C: y=x^3$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t \neq 0$）がある．点 P における C の接線と C とのもう１つの交点を Q とし，点 Q における C の接線と C とのもう１つの交点を R とする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を実数とする．$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の2点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $l: y=x+k$ を考える．

(1)　放物線と直線 l が異なる2個の共有点をもつような k の範囲を求めよ．

(2)　k は(1)で求めた条件を満たすとして，さらに $k>0$ とする．(1)の2つの共有点をP，Qとし，Oを原点とするとき，三角形OPQの面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

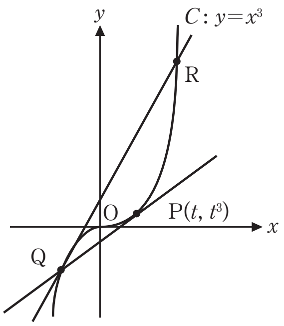
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法，積分法①

1　曲線 $C：y=x^3$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t\neq0$）がある．点Ｐにおける C の接線と C とのもう１つの交点をＱとし，点Ｑにおける C の接線と C とのもう１つの交点をＲとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$ のとり得る値の範囲を求めよ．



$C：y=x^3$　より　$y'=3x^2$

点Ｐにおける C の接線の傾きは $3t^2$ であり，接線の方程式は

$y=3t^2(x-t)+t^3$　より　$y=3t^2x-2t^3$

C との交点は

$x^3=3t^2x-2t^3$

$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$(x-t)^2(x+2t)=0$　　よって　$x=t,\ -2t$

ゆえに　$\mathrm{Q}(-2t,\ -8t^3)$

点Ｑにおける C の接線の傾きは　$3(-2t)^2=12t^2$　である．

ここで，直線PQ，QRと x 軸の正方向のなす角をそれぞれ α，β とすると

$\tan\alpha=3t^2$，$\tan\beta=12t^2$

よって　$\tan\angle\mathrm{PQR}=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{9t^2}{1+36t^4}=\dfrac{9}{\dfrac{1}{t^2}+36t^2}$　（$t\neq0$ より）

ここで，$t^2>0$ より　$\dfrac{1}{t^2}+36t^2\geqq2\sqrt{\dfrac{1}{t^2}\times36t^2}=12$

等号成立は $\dfrac{1}{t^2}=36t^2$ より　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　のとき

よって　$0<\tan\angle\mathrm{PQR}\leqq\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$　　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{4}{5}\leqq\cos\angle\mathrm{PQR}<1}$

2　a を実数とする．$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の２点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ．

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+(3a-6)$

$f'(x)=0$ より，　$3x^2+2ax+(3a-6)=0$ が異なる２実数解をもてばよい．

判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-9a+18>0$　　よって　$\boldsymbol{a<3,\ 6<a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f'(x)=0$ の 2 解が p，$q(p<q)$ である.

ここで，$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}a\right)+\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)x+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+5\right)$ より

$$f(p)=\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)p+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+5\right)$$

$$f(q)=\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)q+\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+5\right)$$

$f(q)-f(p)=\left(-\frac{2}{9}a^2+2a-4\right)(q-p)$　　よって　$m=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=\boldsymbol{-\frac{2}{9}a^2+2a-4}$

3　座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $l:y=x+k$ を考える.

(1)　放物線と直線 l が異なる 2 個の共有点をもつような k の範囲を求めよ.

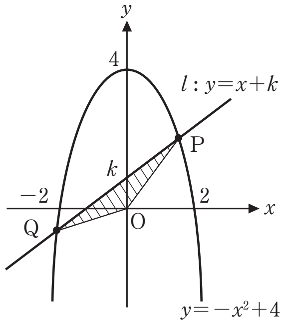
(2)　k は(1)で求めた条件を満たすとして，さらに $k>0$ とする.(1)の 2 つの共有点を P，Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ.

(1)　$-x^2+4=x+k$　より　$x^2+x+k-4=0$　……①

が異なる 2 実数解をもてばよい.

判別式を D とすると　$D=1-4(k-4)>0$

よって　$\boldsymbol{k<\frac{17}{4}}$



(2)　条件より，$0<k<\frac{17}{4}$

①の 2 解を α，β とし，P$(\alpha,\alpha+k)$，Q$(\beta,\beta+k)$ とすると，$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=k-4$ である.

△OPQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\alpha(\beta+k)-(\alpha+k)\beta|=\frac{1}{2}k|\alpha-\beta|\qquad S^2=\frac{1}{4}k^2(\alpha-\beta)^2=\frac{1}{4}k^2(-4k+17)$$

ここで，$f(k)=k^2(-4k+17)$ とすると

$$f'(k)=-12k^2+34k=-2k(6k-17)$$

k	(0)	$\cdots$	$\frac{17}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{17}{4}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↗	最大	↘	(0)

よって，△OPQ の面積は　$\boldsymbol{k=\frac{17}{6}}$　のときに最大となり

その最大値は　$\sqrt{\frac{1}{4}f\left(\frac{17}{6}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2\cdot\frac{17}{3}}=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{51}}{36}}$　である.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上で，１つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点Ｐの x 座標を $a\ (>0)$ とするとき，円の中心Ｃの座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が交わり，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=x^3-3x^2+x$ とし，放物線 $y=f(x)$ が定める曲線を F とする．

(1)　直線 $y=2x-3$ と曲線 F の 3 つの交点の座標を求めよ．

(2)　(1)で求めた 3 つの交点を $\mathrm{A}(a,\, f(a))$，$\mathrm{B}(b,\, f(b))$，$\mathrm{C}(c,\, f(c))$ $(a<b<c)$ とし，曲線 F 上に点 $\mathrm{P}(p,\, f(p))$ をとる．P が $b<p<c$ を満たすとき，三角形 BPC の面積 S を p を用いて表せ．

(3)　(2)で求めた面積 S の最大値とそのときの p の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

名大数学ⅠAⅡB　第３講　微分法，積分法①　練習問題　解答

|1| 座標平面上で，１つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点 P の x 座標を $a(>0)$ とするとき，円の中心 C の座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が交わり，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

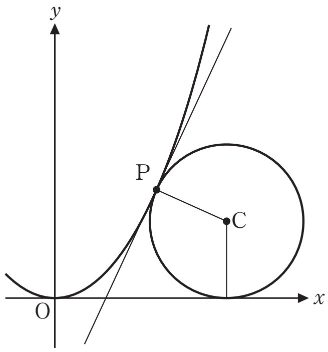
解答例

$y=x^2$ より $y'=2x$

よって，$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y=2a(x-a)+a^2$　より　$y=2ax-a^2$　……①

と表すことができる．



求める円 C の中心を $\mathrm{C}(c,\ r)$ $(c>0,\ r>0)$ とすると

①⊥直線 PC より

$$\frac{r-a^2}{c-a}\cdot 2a=-1 \qquad \text{よって}\quad c=a-2a(r-a^2)\quad \cdots\cdots②$$

また，PC$=r$ より

$$(c-a)^2+(r-a^2)^2=r^2\quad \cdots\cdots③$$

③の代わりに
(直線①と円の中心 C との距離)＝(半径 r)
としたいところだが，直線①と円の中心 C との距離は線分 PC の長さそのもの．つまり，円の中心から直線に下ろした垂線の足である点 P の座標がわかっているため，わざわざ「点と直線の距離の公式」を用いる必要がない．

③に②を代入し，r について整理すると

$$4r^2-2(4a^2+1)r+a^2(4a^2+1)=0$$

円の中心の y 座標 $r<a^2$ であるから　$r=\dfrac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{4}$

このとき，②より

$$c=a-2a\left(\frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{4}-a^2\right)=\frac{a\left(1+\sqrt{4a^2+1}\right)}{2}$$

ゆえに，求める円の中心の座標は

$$\mathbf{C}\left(\frac{a\left(1+\sqrt{4a^2+1}\right)}{2},\ \frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{4}\right)$$

〔別解〕

円 C：$(x-c)^2+(y-r)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$(a-c)(x-c)+(a^2-r)(y-r)=r^2$　より　$(a-c)x+(a^2-r)y+c^2-ac-a^2r=0$　と表せる．

これと①の $2ax-y-a^2=0$　が一致することより，係数を比較して

$a-c=2ak,\ a^2-r=-k,\ c^2-ac-a^2r=-a^2k$

これらより k を消去することで，c と r を導くことができる．

(片方の係数を k 倍するのを忘れずに．たとえば $x+y=1$ と $2x+2y=2$ は同一式である)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $f(x)=x^3-3x^2+x$ とし，$y=f(x)$ が定める曲線を F とする．

(1) 直線 $y=2x-3$ と曲線 F の3つの交点の座標を求めよ．

(2) (1)で求めた3つの交点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$，$\mathrm{C}(c,\ f(c))$ $(a<b<c)$ とし，曲線 F 上に点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ をとる．P が $b<p<c$ を満たすとき，三角形 BPC の面積 S を p を用いて表せ．

(3) (2)で求めた面積 S の最大値とそのときの p の値を求めよ．

解答例

(1) 直線 $y=2x-3$ と曲線 F : $y=x^3-3x^2+x$ の交点の x 座標は

$$x^3-3x^2+x=2x-3 \qquad x^3-3x^2-x+3=0$$

$$(x+1)(x-1)(x-3)=0$$

> 3次方程式の解を求めるには因数分解が基本．3つの解のうち少なくとも1つは実数解であるため，その解を見つけ，その後「組立除法」を用いるとよい．

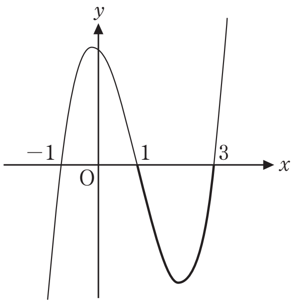
よって　$x=-1,\ 1,\ 3$　　ゆえに，3交点の座標は $\boldsymbol{(-1,\ -5)}$，$\boldsymbol{(1,\ -1)}$，$\boldsymbol{(3,\ 3)}$

(2) (1)より $\mathrm{A}(-1,\ -5)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$，$\mathrm{C}(3,\ 3)$

$\mathrm{BC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

また，点 P の座標を $\mathrm{P}(p,\ p^3-3p^2+p)$　$(1<p<3)$ とおくと

点 P と直線 $y=2x-3$　つまり　$2x-y-3=0$ との距離 d は



$y=x^3-3x^2-x+3$

$$d=\frac{|2p-(p^3-3p^2+p)-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|p^3-3p^2-p+3|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{|(p+1)(p-1)(p-3)|}{\sqrt{5}}=\frac{-p^3+3p^2+p-3}{\sqrt{5}}$$

（$1<p<3$ より）

よって，三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{-p^3+3p^2+p-3}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-p^3+3p^2+p-3}$$

(3) $S(p)=-p^3+3p^2+p-3$ とおくと　$S'(p)=-3p^2+6p+1$

$S'(p)=0$ より　$p=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$　$(1<p<3)$

p	1	…	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	…	3
$S'(p)$		+	0	−	
$S(p)$	0	↗		↘	0

ここで，$S(p)=S'(p)\cdot\left(\dfrac{1}{3}p-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{8}{3}p-\dfrac{8}{3}$ より

$S(p)\div S'(p)$ による次数下げ．

求める S の最大値は

$$S\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8}{3}\cdot\frac{3+2\sqrt{3}}{3}-\frac{8}{3}=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{9}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。